# Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαφορικός Λογισμός (Β' Μέρος)

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.6 Α

Συνέπειες του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

## Προτεινόμενες Ασκήσεις

**62.** Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε
$$f(x)f'(x)=0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$
Να αποδείξετε ότι:

**i)** η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο
$$g(x)=f^3(x) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$
είναι σταθερή

**ii)** αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(0)=2$, τότε
$$f(x)=2 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

**63.** Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε
$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}f(x) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

**i)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο
$$g(x)=\frac{f(x)}{x^2+1} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$
είναι σταθερή.

**ii)** Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(1)=2$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f$.

**64.** Έστω δύο συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη
- $f'(0)=f(0)=1$
- $f''(x)+f(x)=2e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $g(x)=\left[f(x)-e^x\right]^2+\left[f'(x)-e^x\right]^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**i)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g$ είναι σταθερή.

**ii)** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f$.

**65.** Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(0)=f'(0)=0$ και

$$f(x)f'(x)+f'(x)f''(x)=0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

**66.** Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$0\le 2f'(x)\le \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha<\beta$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι σταθερή.

**67.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

**i)** $f(1)=6$ και $f'(x)=3x^2+2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

**ii)** $f(0)=1$ και $f'(x)=8x^3+\text{συν}x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

**iii)** $f(0)=4$ και $f'(x)=e^x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

**iv)** $f(0)=2$ και $f'(x)=e^x-\text{ημ}x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**68.** Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=1$ και τέτοια, ώστε

$$f(x\cdot y)=f(x)+f(y) \quad \text{για κάθε } x, y\in(0,+\infty).$$

**i)** Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$.

**ii)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{1}{x} \quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

**iii)** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f$.

**69.** Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$f(-1)=1,\ f(1)=-1 \quad \text{και} \quad f'(x)=\frac{1}{x} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*.$$

**70.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f''(x)=6x-4 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και επιπλέον η $C_f$ έχει στο σημείο της $A(0,2)$ κλίση ίση με 3.

**71.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

**i)** $f(e)=1$ και $f'(x)=\dfrac{3\ln^2 x}{x}$ για κάθε $(0,+\infty)$

**ii)** $f(\pi)=0$ και $\eta\mu x+(\sigma\upsilon\nu x+2)f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

**iii)** $f(0)=e$ και $f'(x)=e^{e^x+x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**72.** Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$f(8)=10 \quad \text{και} \quad f'(x^3)=1 \quad \text{για κάθε } x>0.$$

**73.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

**i)** $f(\pi)=0$ και $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

**ii)** $f(0)=-1$ και $f'(x)=xe^x+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

**iii)** $f(1)=5$ και $f'(x)+xf''(x)=9x^2+4x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

**iv)** $f(0)=0$ και $2f'(x)+xf''(x)=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**74.** Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f'(0)=\dfrac{1}{3}$ και

$$e^{f(x)}\cdot f'(x)=1+xf'(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

**i)** Να αποδείξετε ότι

$$\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+9 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

**ii)** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

**75.** Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$f(1)=2 \quad \text{και} \quad f'(x)=\frac{f(x)}{x} \quad \text{για κάθε} \quad x>0.$$

**76.** Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

**i)** $f(1)=1$ και $xf'(x)-f(x)=2x^3$ για κάθε $x>0$

**ii)** $f(1)=1$ και $\dfrac{f(x)}{f'(x)}+x^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-2x$ για κάθε $x>0$.

**77.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f(0)=1 \quad \text{και} \quad f'(x)+2f(x)=e^{-2x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

**78.** Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(0)=1 \quad \text{και} \quad \left(f(x)-x\right)\left(f'(x)-1\right)=x \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}+x \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

**79.** Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f'(0)=1 \quad \text{και} \quad f(x+y)+f(xy)=f(x)f(y)+1 \quad \text{για κάθε} \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

**i)** Να αποδείξετε ότι

$$f'(x)=f(x)-x \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

**ii)** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

**80.** Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f'(x)=1-f(x)+f(-x) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

**i)** Να αποδείξετε ότι:

**α)** $f'(x)+f'(-x)=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

**β)** $f(x)-f(-x)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**ii)** Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(0)=1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

**81.** Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f'(x)\cdot συνf(x)=f'(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

**i)** η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=ημf(x)-f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

είναι σταθερή

**ii)** αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(0)=0$, τότε

$$f(x)=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

**82.** Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(0)=f'(0)=1 \quad \text{και} \quad f(x+y)\le f(x)\cdot f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

**i)** Να αποδείξετε ότι $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**ii)** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

# numerica.

A. Liapis