Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαφορικός Λογισμός (Β' Μέρος)

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.7 Α

Τοπικά Ακρότατα Συνάρτησης
Το Θεώρημα του Fermat

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

114. Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty)$ με εξαίρεση το σημείο 1, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Η παράγωγος της συνάρτησης f δίνεται από τον τύπο

$$f'(x)=\frac{\left(2-\sqrt{x}\right)e^x}{(x-1)^2} \text{ για κάθε } x\in[0,1)\cup(1,+\infty).$$

Να βρείτε:

i) τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f

ii) τις πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f.

115. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\left(x^2+\beta x+\gamma\right)e^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

όπου β, γ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στα σημεία $x_1=0$ και $x_2=1$, να βρείτε τις τιμές των β και γ.

116. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

όπου α, β, γ, δ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\neq 0$. Αν η f παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα διαφορετικά μεταξύ τους, να αποδείξετε ότι $\beta^2>3\alpha\gamma$.

117. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$\left(f(x)\right)^3-3f(x)=2x^3+3x^2+6x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f^2(x)\cdot f'(x)-f'(x)=2x^2+2x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) η συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα

iii) αν επιπλέον ισχύει η σχέση $-1<f(x)<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε τη συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

118. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f\left(f\left(x\right)\right)=x+8 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα

ii) αν επιπλέον η συνάρτηση f' είναι συνεχής με $f'\left(8\right)=8$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

119. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$f^2\left(0\right)\le f\left(0\right) \quad \text{και} \quad f\left(x\right)\le ημx \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

120. **i)** Αν ισχύει η σχέση $α\ln x\le x^2-1$ για κάθε $x>0$ να αποδείξετε ότι $α=2$.

ii) Αν ισχύει η σχέση $α\ln x\le x\lnα$ για κάθε $x>0$ να αποδείξετε ότι $α=e$.

iii) Αν $α,β>1$ και ισχύει η σχέση $α^x+β^{\frac{1}{x}}\geα+β$ για κάθε $x>0$ να αποδείξετε ότι $α^α=β^β$.

121. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$f\left(0\right)=1 \quad \text{και} \quad f\left(x\right)\cdot e^{-x}\le x^2+1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\left(x^2+1\right)e^x$, $x\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο

ii) $f'\left(0\right)=1$.

122. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f\left(1\right)\le f\left(x\right)\le f\left(4\right) \quad \text{για κάθε } x\in\left(0,5\right).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f'\left(1\right)=f'\left(4\right)$

ii) η εξίσωση $f''\left(x\right)=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

123. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(x)-f(1-x)=1-2x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και

$$f(x)\le f(0)=1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε:

i) την τιμή $f'(0)$

ii) την τιμή $f'(1)$

iii) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

124. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $f(\mathbb{R})=[1,2]$. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f' δεν είναι $1-1$

ii) υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$.

125. Έστω συνάρτηση $f:\ \to\ $, η οποία είναι παραγωγίσιμη και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$. Έστω επίσης, η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=f^2(x)-2f(x)+5 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $g(x)\ge 4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$.

126. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$2f(x)\le f(1)+f(2) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=f(2)$

ii) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο

iii) αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες.

127. Έστω συνάρτηση $f:(-\infty,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο β. Να αποδείξετε ότι:

i) **α)** αν η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο β, τότε $f'(\beta)\le 0$

β) αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο β, τότε $f'(\beta)\ge 0$.

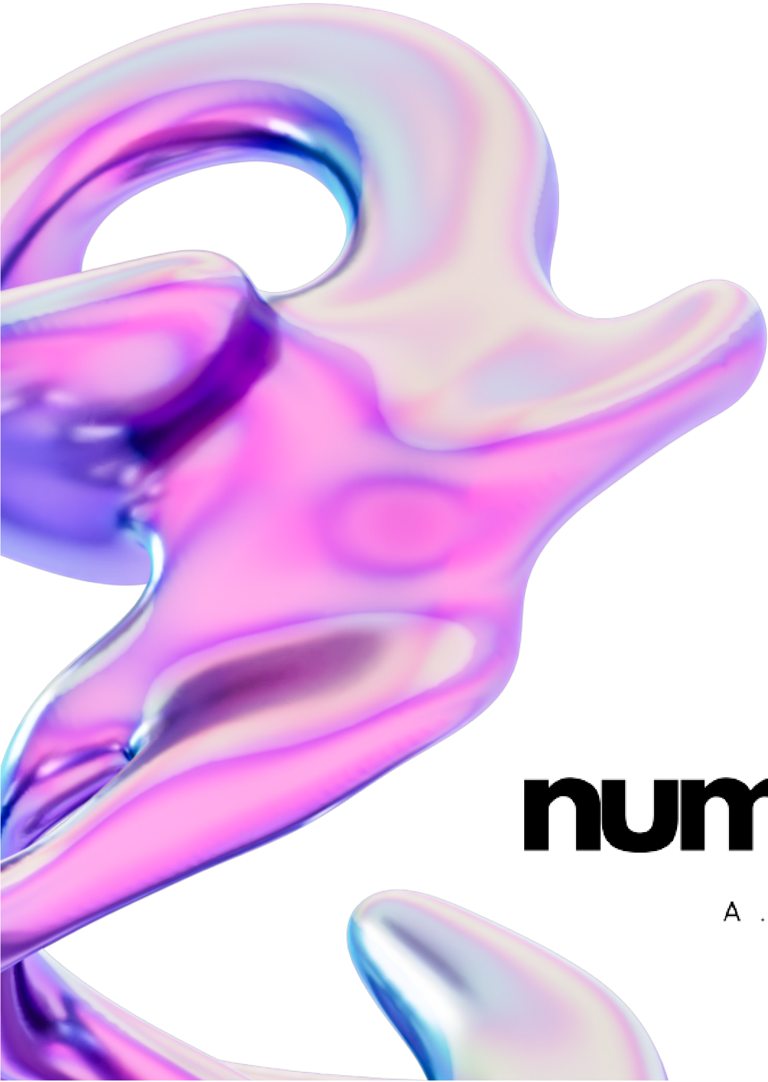
ii) αν $f'(\beta)>0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο β

iii) αν $f'(\beta)<0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο β.

128. Έστω συνάρτηση $f:[1,3]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, χωρίς κρίσιμα σημεία και τέτοια, ώστε $f(1)=31$ και $f(3)=13$.

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f^2(x)$ έχει το πολύ ένα κρίσιμο σημείο.



numerica.

A. Liapis