Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαφορικός Λογισμός (Β' Μέρος)

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.8

Κυρτότητα – Σημεία Καμπής Συνάρτησης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

174. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες:

i) $f(x)=x^3-3x^2+4x-5$ **ii)** $f(x)=(x-2)e^x$

iii) $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ **iv)** $f(x)=x-\eta\mu x,\ x\in[0,2\pi]$

175. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές:

i) $f(x)=x^4+2x^3+6x^2+12$ **ii)** $f(x)=2e^x+2\eta\mu x+x^2+x+2$

iii) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ **iv)** $f(x)=2x^6+5x^4+7x+11.$

176. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων:

i) $f(x)=x^2-4x\ln x$ **ii)** $f(x)=\dfrac{3}{5}x^5-x^4+7x-1$

iii) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ **iv)** $f(x)=\dfrac{1}{\pi}x+\sigma\upsilon\nu x,\quad x\in(0,\pi).$

177. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=2x^6-6x^5+5x^4-x+1$ **ii)** $f(x)=3x^5-5x^4+x+1$

iii) $f(x)=x^4-2x^3+x-1$ **iv)** $f(x)=\varepsilon\varphi x-x,\quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right).$

178. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^3-3x^2+4,\ x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε κάποιο σημείο x_1, τοπικό ελάχιστο σε κάποιο σημείο x_2 και καμπή σε κάποιο σημείο x_3

ii) τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

179. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x)=(x+\alpha)e^{\beta x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$
όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_1=1$.

i) Να αποδείξετε ότι $\beta+\alpha\beta=-1$.

ii) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει καμπή στο σημείο $x_2=2$, να βρείτε τους αριθμούς α και β.

180. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x)=x^4+2\alpha x^3+6\beta x^2+x+7 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$
όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση $f''(x)$.

ii) Αν η C_f έχει δύο σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι $\alpha^2>4\beta$.

181. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x)=4x^2-7\eta\mu x, \quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι σε κάθε σημείο της C_f η εφαπτομένη ευθεία της δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f εκτός από το σημείο επαφής.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $4x^2+7x=7\eta\mu x$.

182. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x)=(x+1)\ln x, \quad x>0.$$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

iii) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2}\ln x<\frac{x-1}{x+1}$ για κάθε $x\in(0,1)$.

183. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή και τέτοια, ώστε
$$f'(x)>0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(e^x)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι επίσης κυρτή.

184. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x},\quad x\in(-1,1).$$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

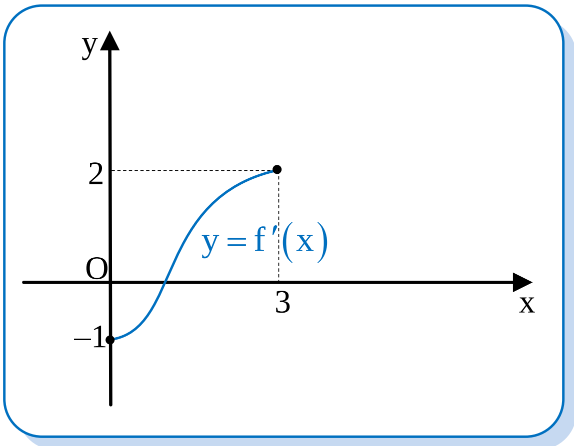
ii) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)-2x}.$$

185. Έστω συνάρτηση $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(3)=6$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι κυρτή

ii) $f(x)\geq 2x$ για κάθε $x\in[0,3]$.



186. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=x\ln x\quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,0)$.

iii) Να αποδείξετε ότι

$$\ln x\geq 1-\frac{1}{x}\quad \text{για κάθε } x>0.$$

iv) Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει η σχέση $\alpha\beta\gamma=1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq 3.$

187. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f'(0)=f(0)=-1 \quad \text{και} \quad f''(x)>0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f σε σημείο $A(0, f(0))$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$f(x)\geq -x-1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

iii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση

$$f'(x)\neq 0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}, \text{ τότε:}$$

α) να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

β) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα, η οποία ανήκει στο διάστημα $(-1, 0)$.

188. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-6}{x-2}=3 \quad \text{και} \quad f''(x)<0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

i) Να βρείτε την τιμή $f(2)$.

ii) Να βρείτε την τιμή $f'(2)$.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x)\leq 3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

189. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) αν επιπλέον η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0=2$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi+1)=f(\xi)$.

190. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, κοίλη και τέτοια, ώστε $f(1)=f(0)+1$ και $f'\left(\frac{1}{2}\right)<1$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=1$

ii) η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=f(x)-x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

είναι κοίλη

iii) η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

191. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,3]$. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=2$ και η συνάρτηση f' είναι κυρτή στο διάστημα $[1,3]$, να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχουν $\xi_1\in(1,2)$ και $\xi_2\in(2,3)$ τέτοιοι, ώστε

$$f''(\xi_1)=-f'(1) \quad \text{και} \quad f''(\xi_2)=f'(3)$$

ii) $f'(1)+f'(3)>0$.

192. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) το x_0 είναι μοναδικό

ii) το $f(x_0)$ είναι ολικό ελάχιστο της συνάρτησης f.

193. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

194. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και κοίλη. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=f'(x)-2x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

είναι $1-1$

ii) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει το πολύ δύο κοινά σημεία με την παραβολή $y=x^2$.

195. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x)=f'(x)-\frac{1}{x} \quad \text{για κάθε } x>0$$

είναι $1-1$

ii) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=\ln x \quad \text{για κάθε } x>0$$

έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

196. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και κοίλη και τέτοια, ώστε

$$f(1)=f(2)=0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει μοναδικός $\xi\in(1,2)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi)=0$

ii) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση ξ

iii) αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f'(1)=1$, τότε

$$f(\xi)<1.$$

197. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(x)\le f(-1) \text{ για κάθε } x<0$$

και

$$f(x)\ge f(1) \text{ για κάθε } x>0.$$

i) Να βρείτε τις τιμές $f'(-1)$ και $f'(1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη.

iii) Αν επιπλέον η συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

198. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$2x^2\le f(x)\le x^4+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι κοίλη.

199. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$f(1)-f(0)<f'(0) \quad \text{και} \quad f(2)-f(0)>2f'(0).$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη.

200. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f'(0)=f(0)=1 \quad \text{και} \quad f(x)f''(x)=e^{2x} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)=x+1.$$

iii) Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{f(x)-x-1}.$$

201. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(0)=-1,\quad f'(0)=2 \quad \text{και} \quad f''(x)>0 \ \text{για κάθε} \ x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)\geq 2x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) η εξίσωση $f'(f(x))=2$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

202. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f'(x)\neq 0 \ \text{για κάθε} \ x\in(0,+\infty)$$

και

$$f(f(x))=(f(x))^2 \ \text{για κάθε} \ x\in(0,+\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f''(f(x))=2$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

ii) αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα $(0,+\infty)$, τότε η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής.

203. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^2+x+\text{συν}x-1,\quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $\text{συν}x=1-x^2$.

204. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(\frac{2}{x}-1\right).$$

i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\ln\sqrt{\frac{2}{x}-1}=1-x$.

205. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln(\ln x),\quad x\in(1,+\infty).$$

i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη ευθεία της με εξαίρεση το σημείο επαφής.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x+1)-f(x)=f(e+1).$$

206. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$2f(x)-\eta\mu f(x)=x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} και να αποδείξετε ότι η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης

iii) Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)-x}.$$

207. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή και τέτοια, ώστε

$$f(4)=f(5)=7.$$

i) Να λύσετε την εξίσωση

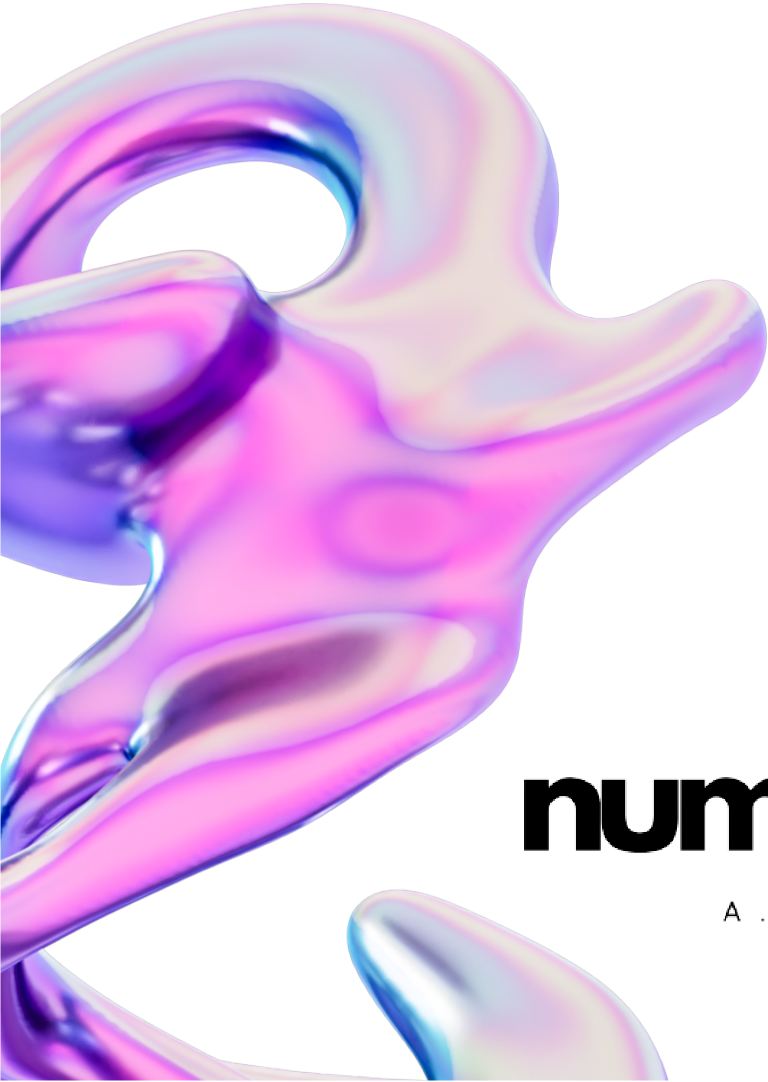
$$f(x+1)=f(x).$$

ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(3x+2)<f(3x+1).$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)=7.$$



numerica.

A. Liapis