

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαφορικός Λογισμός
(Β' Μέρος)

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.9 Β

Κανόνες de l' Hospital

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

218. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \eta\mu x}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(\eta\mu x)}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)}$.

219. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sigma\upsilon\nu x}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x - \eta\mu x}{x - \eta\mu x}$.

220. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 5^x}{x^2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{1 + x - e^x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\eta\mu x}}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{1 + x \ln x - x}$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\phi x}{\ln|x|}$

221. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2 \ln x}{e^x + x}$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \sqrt{x})$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\eta\mu x} - \frac{1}{x} \right)$.

222. Δίνεται η συνάρτηση $f : \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = (\eta\mu x)^x \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) = e^{x \ln(\eta\mu x)}$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

223. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} , παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

ii) η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

224. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και τέτοια, ώστε $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 1$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$.

225. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(-x)}{x} = -f''(0)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x^2} = f''(0)$.

226. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^2(x) - 9x^2) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)f'(x) - 9x) = 6.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - 9x^2}{f(x) + 3x} = 2$

iii) η ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

227. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και τέτοια, ώστε

$$f(2) = 0 \text{ και } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

- ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ αν είναι γνωστό ότι αυτή είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και ισχύουν οι σχέσεις $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$.

- 228.** Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

και

$$f(x) \leq f(1) = -1 \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

- i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
 ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

- 229.** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f''(x) = e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(x) \geq f(0) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
 ii) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

- 230.** Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 4x + 3}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x}, & 0 < x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1. \end{cases}$

- 231.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (e^x + x)^{\frac{1}{x}}, \quad x \in (0, +\infty).$$

- i) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^2$.
 ii) Να βρείτε – αν υπάρχουν – τις ασύμπτωτες της C_f .

232. Να βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x + \eta\mu x}{x - \eta\mu x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

233. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$\frac{1}{x} + f'(x) = \frac{1}{x} e^{x-f(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι $xe^{f(x)} = e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.
 ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

234. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$x^3 f'(x) = 2f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η ευθεία $y = 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$ και στο $+\infty$, να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

235. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^x + \beta^x, & x \leq 0 \\ \sin(\alpha x) + \sin(\beta x), & x > 0 \end{cases}$$

όπου α, β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(-1, \frac{5}{2}\right)$.

236. Έστω συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} f(x)) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f'(x)) = 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η ευθεία $y = 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f
 ii) η ευθεία $y = 0$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f' .

237. i) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - e^{3x}}{x} \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \ln \left(\frac{x^2}{x+1} \right) \right].$$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} (\sin 2x - e^{3x}) \ln \left(\frac{x^2}{x+1} \right), & x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής.

238. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε

$$2f^3(x) - 2f^2(x) + f(x) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} f(ax), & x \leq 1 \\ f(\beta x^2 + 1), & x > 1 \end{cases}$$

όπου a, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Να αποδείξετε ότι:

- i)** η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και η συνάρτηση f' είναι συνεχής
- ii)** $a = 2$ και $\beta = 1$.

239. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και τέτοια, ώστε:

- η ευθεία $y = 2x - 2$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $A(1, f(1))$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(x+h) + f(x-2h) - 3f(x)}{h^2} = 18x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

- i)** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-2h)}{h} = 3f''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- ii)** $f(x) = x^3 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



numerica.

A . L i a p i s