Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαφορικός Λογισμός (Α' Μέρος)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

numerica.

A. Liapis

Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

β) $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

γ) Αν s είναι η συνάρτηση θέσης ενός σώματος, που κινείται πάνω σε έναν άξονα και α είναι η συνάρτηση της επιτάχυνσης του σώματος αυτού, τότε ισχύει $\alpha(t) = s''(t)$ για κάθε χρονική στιγμή t.

δ) Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο σημείο x_0, είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

ε) Αν $\alpha > 0$, τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, & x \le 1 \\ 3 - 2\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $\alpha + \beta = 1$.

Β2. Να βρείτε τις τιμές των αριθμών α και β για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

Β3. Για $\alpha = -2$ και $\beta = 3$, να βρείτε:

α) την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$

β) την εξίσωση της εφαπτομένης (η) της C_f, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή και τέτοια, ώστε

$$x^2 f(x)\le ημ^3 x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

Γ2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης $(ε)$ της C_f στο σημείο $O(0,0)$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(ε)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=x^{ημx},\quad x>0$$

στο σημείο $M\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty)$$

και

$$4f(x^2)+xf(2x)=x^4+x^3+x+4 \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty).$$

Δ1. Να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(4)$ και το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{|2x-3|-1}{f(x+3)-5}.$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2,f(2))$ διέρχεται από το σημείο $B(4,8-8f'(1))$.

Δ3. Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f έτσι, ώστε η τετμημένη του x να αυξάνει με ρυθμό 6 cm/sec. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το M διέρχεται από το σημείο $Γ(4,f(4))$, να βρείτε:

α) το ρυθμό με τον οποίο αυξάνει η τεταγμένη y του σημείου M

β) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του τριγώνου OMN, όπου O η αρχή των αξόνων και N η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$.

numerica.

A. Liapis