Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαφορικός Λογισμός (Β' Μέρος)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ

numerica.

A. Liapis

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

1. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και τέτοια, ώστε $f(\alpha)\neq f(\beta)$, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Σ Λ

2. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και τέτοια, ώστε $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ ισχύει $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Σ Λ

3. Υπάρχει συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)$ για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Σ Λ

4. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)$ και τέτοια, ώστε $f'(\xi)=0$, για κάποιο $\xi\in(\alpha,\beta)$ είναι παραγωγίσιμη στο (α,β). Σ Λ

5. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)$. Αν δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, τότε η f δεν είναι ούτε συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ούτε παραγωγίσιμη στο (α,β). Σ Λ

6. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και τέτοια, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ για κάποιο $\xi\in(\alpha,\beta)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ή παραγωγίσιμη στο (α,β). Σ Λ

7. Υπάρχει συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) με

$$f'(x)\neq\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\beta).$$ Σ Λ

8. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β). Αν $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ. Σ Λ

9. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ της γραφικής της παράστασης. Αν δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ, τότε η f ή δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ή δεν ειναι παραγωγίσιμη στο (α,β). Σ Λ

10. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και μη σταθερή σε ένα διάστημα Δ ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$. Σ Λ

11. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο Α με $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A$ είναι σταθερή στο Α. Σ Λ

12. Για όλες τις συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και τέτοιες, ώστε $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$. Σ Λ

13. Για όλες τις συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο Α και τέτοιες, ώστε $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in A$, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in A$. Σ Λ

14. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$. Σ Λ

15. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και τέτοια, ώστε $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. Σ Λ

16. Για κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και για κάθε $x_0 \in A$, το οποίο είναι θέση τοπικού μεγίστου της f υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Σ Λ

17. Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία κάποιο τοπικό μέγιστο είναι μικρότερο από κάποιο τοπικό ελάχιστο. Σ Λ

18. Κάθε συνάρτηση f έχει ένα τουλάχιστον τοπικό ακρότατο. Σ Λ

19. Κάθε συνάρτηση η οποία παρουσιάζει ολικό ελάχιστο παρουσιάζει και τοπικό ελάχιστο. Σ Λ

20. Για κάθε συνάρτηση f η οποία παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, αυτό είναι το μικρότερο από όλα τα τοπικά ελάχιστα. Σ Λ

21. Για κάθε συνάρτηση f η οποία παρουσιάζει ολικό μέγιστο, αυτό είναι το μεγαλύτερο από όλα τα τοπικά μέγιστα. Σ Λ

22. Κάθε συνάρτηση f η οποία παρουσιάζει τοπικά μέγιστα, παρουσιάζει και ολικό μέγιστο που είναι το μεγαλύτερο από όλα τα τοπικά μέγιστα. Σ Λ

23. Κάθε συνάρτηση f η οποία παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα, παρουσιάζει και ολικό ελάχιστο που είναι το μικρότερο από όλα τα τοπικά ελάχιστα. Σ Λ

24. Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f' μηδενίζεται και τα άκρα του Δ που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της. Σ Λ

25. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν. Σ Λ

26. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. Σ Λ

27. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). Σ Λ

28. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ η μεγαλύτερη από τις τιμές της στα κρίσιμα σημεία της και στα σημεία α, β είναι το μέγιστο της f στο $[\alpha,\beta]$. Σ Λ

29. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ η μικρότερη από τις τιμές της στα κρίσιμα σημεία της είναι το ελάχιστο της f στο $[\alpha,\beta]$. Σ Λ

30. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Σ Λ

31. Αν μία συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής. Σ Λ

32. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ ισχύει

$$f''(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\Delta.$$ Σ Λ

33. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) και ένα σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$. Αν η f είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β) ή αντιστρόφως, το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. Σ Λ

34. Αν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x)=0$.

35. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ παρουσιάζει καμπή σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ στο οποίο η f'' μηδενίζεται. Σ Λ

36. Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ στο οποίο είναι δύο φορές παραγωγίσιμη είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται. Σ Λ

37. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f. Σ Λ

38. Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακορυφή ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν και τα δύο όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι ίσα με $+\infty$ ή $-\infty$. Σ Λ

39. Η ευθεία $y = \beta$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \beta$. Σ Λ

40. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (\lambda x + \beta)\right] = +\infty$. Σ Λ

41. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \beta \in \mathbb{R}.$$ Σ Λ

42. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες. Σ Λ

43. Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες. Σ Λ

44. Κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε στα άκρα διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται και στα σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η f ίσως δεν είναι συνεχής. Σ Λ

45. Κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης έχει το πολύ δύο κατακόρυφες ασύμπτωτες. Σ Λ

46. Κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης έχει το πολύ δύο οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες. Σ Λ

47. Για κάθε συνάρτηση f η γραφική της παράσταση δεν έχει κοινά σημεία με τις ασύμπτωτές της. Σ Λ

48. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ Σ Λ

49. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ και δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$. Σ Λ

50. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ Σ Λ

51. Οι κανόνες de l' Hospital ισχύουν για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{+\infty}{+\infty}$ και $\frac{-\infty}{-\infty}$ όχι όμως για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$ και $\frac{-\infty}{+\infty}$. Σ Λ

52. Οι κανόνες de l' Hospital δεν ισχύουν για πλευρικά όρια. Σ Λ

numerica.

A . L i a p i s