Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.1 Παράγουσα Συνάρτηση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f στο διάστημα $\mathbb{R}$ όταν:

i) $F(x)=\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x$ και $f(x)=x\sigma\upsilon\nu x$

ii) $F(x)=-(x+1)e^{-x}$ και $f(x)=xe^{-x}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}},\quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x)=\ln\left(e^{2x}+1\right),\quad x\in\mathbb{R}$$

είναι μία παράγουσα της συνάρτησης f.

ii) Να βρείτε όλες τις παράγουσες της συνάρτησης f.

3. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης f όταν:

i) $f(x)=4x^3-3x^2,\quad x\in\mathbb{R}$

ii) $f(x)=x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R}$

iii) $f(x)=\sqrt{x^3},\quad x\in(0,+\infty)$

iv) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}},\ x\in(0,+\infty)$.

4. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης f όταν:

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x},\ x\in(0,+\infty)$

ii) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2,\ x\in(0,+\infty)$

iii) $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$

iv) $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^3 x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x},\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης f όταν:

i) $f(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$

ii) $f(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$

iii) $f(x)=e^x\ln x+\dfrac{e^x}{x},\ x\in(0,+\infty)$

iv) $f(x)=2^x\left(x^3\ln 2+3x^2\right),\ x\in\mathbb{R}$.

6. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης f όταν:

i) $f(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}, \quad x\in(0,+\infty)$

ii) $f(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}, \ x\in(-\infty,0)$

iii) $f(x)=\dfrac{e^x(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

iv) $f(x)=\dfrac{2x\ln x-x}{\ln^2 x}, \ x\in(0,1).$

7. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης f όταν:

i) $f(x)=5\eta\mu^4 x\sigma\upsilon\nu x, \quad x\in\mathbb{R}$

ii) $f(x)=2xe^{x^2}, \ x\in\mathbb{R}$

iii) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \ x\in\mathbb{R}$

iv) $f(x)=\dfrac{\ln^3 x}{x}, \quad x\in(0,+\infty).$

8. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης f όταν:

i) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}, \ x\in\mathbb{R}$

ii) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}, \quad x\in\mathbb{R}$

iii) $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2+\eta\mu x}, \ x\in\mathbb{R}$

iv) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}, \ x\in(1,+\infty).$

9. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x-7}{x^2-5x+4}, \quad x\in\mathbb{R}-\{1,4\}.$$

i) Να βρείτε τους $A, B\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύει η σχέση

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4} \qquad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{1,4\}.$$

ii) Να βρείτε όλες τις παράγουσες της συνάρτησης f στο διάστημα $(1,4)$.

10. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f'(x)\neq 1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-x,\quad x\in\mathbb{R}$$

είναι γνησίως μονότονη

ii) αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(1)=f(2)$, τότε κάθε παράγουσα συνάρτηση της g είναι κοίλη.

11. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(1)=2 \quad \text{και} \quad xf'(x)+f(x)=2x \text{ για κάθε } x>0.$$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

ii) Να βρείτε όλες τις παράγουσες της συνάρτησης f.

12. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και μία παράγουσά της F τέτοια, ώστε

$$F(0)=0 \quad \text{και} \quad f(x)=F(x)-x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

13. Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και μία παράγουσά της F τέτοια, ώστε

$$F(0)=0 \quad \text{και} \quad f(x)=\frac{2}{x}F(x)-1 \text{ για κάθε } x>0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=\frac{f(x)}{x} \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

iii) Αν επιπλέον ισχύει $f(1)=3$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

14. Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και F μία παράγουσά της τέτοια, ώστε

$$F(0)=0 \quad \text{και} \quad \frac{f(x)}{4x}=\sqrt{F(x)}>0 \quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=4x^3$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

15. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, μια παράγουσά της F με $F(1)=0$ και η συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x\cdot F(x),\ \ x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση g δεν είναι $1-1$

ii) υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(\xi)\cdot \varepsilon\varphi\xi=-F(\xi)$.

16. Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κοίλη. Έστω επίσης, F μια παράγουσα της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,+\infty)$ τέτοια, ώστε $F(0)=0$. Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x>0$ υπάρχει $\xi\in(x,2x)$ τέτοιος, ώστε $f(2x)-f(x)=xf'(\xi)$

ii) η συνάρτηση $g(x)=F(2x)-2xf(x),\ x\geq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα

iii) $F(1)<f\left(\frac{1}{2}\right)$.

17. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)<0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

και F μία παράγουσα της f τέτοια, ώστε $F(0)=0$.

i) Να αποδείξετε ότι $xf(x)<F(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $2F(x^2+1)>(x^2+1)\cdot F(2)$.

18. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και F μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$ τέτοια, ώστε

$$F(1)=\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad F(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=x \quad \text{για κάθε} \quad x>0.$$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=F(x)F\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{για κάθε} \quad x>0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση g είναι σταθερή

ii) $F(x)>0$ και $\dfrac{f(x)}{F(x)}=\dfrac{4}{x}$ για κάθε $x>0$

iii) $f(x)=2x^3$ για κάθε $x>0$.

19. Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, κοίλη και τέτοια, ώστε

$$f'(0)=0 \quad \text{και} \quad f(x)>0 \quad \text{για κάθε} \quad x\geq 0.$$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

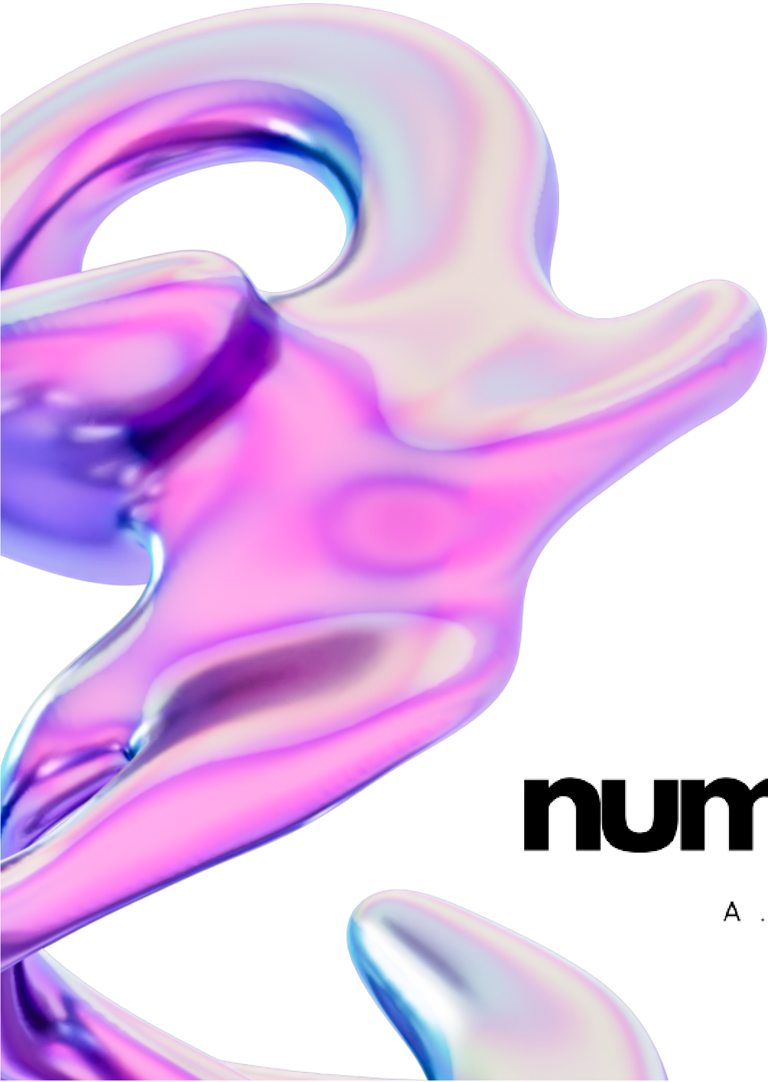
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{F(x)}, & x>0\\[2ex] \dfrac{1}{f(0)}, & x=0\end{cases}$$

όπου F μία παράγουσα της f τέτοια, ώστε $F(0)=0$. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση g είναι συνεχής

ii) $g(x)<\dfrac{1}{f(x)}$ για κάθε $x>0$

iii) η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.



numerica.

A. Liapis