

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.2

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

20. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ 2, & x \geq 2. \end{cases}$$

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να την παραστήσετε γραφικά.
 ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^2 f(x) dx$

β) $\int_0^5 f(x) dx.$

21. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\int_0^1 f(x) dx = 1, \quad \int_2^5 f(x) dx = 3 \quad \text{και} \quad \int_0^5 f(x) dx = 6.$$

Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_1^2 f(x) dx$

ii) $\int_0^2 f(x) dx$

iii) $\int_1^5 f(x) dx.$

22. Να αποδείξετε ότι:

i) $\int_1^2 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 1 + \int_2^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

ii) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \frac{\pi}{12}.$

23. Να βρείτε τον $a \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$\int_2^a \frac{3x^2}{x^2 + (1-x)^2} dx + 3 \int_2^a \frac{(1-x)^2}{x^2 + (1-x)^2} dx = 9.$$

24. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες είναι συνεχείς και τέτοιες, ώστε

$$\int_1^5 f(x) dx = \int_2^5 g(x) dx = \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \int_1^5 g(x) dx = \int_1^2 \left(\int_1^5 f(t) g(x) dt \right) dx = 4.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha \int_1^2 g(x) dx = 4$

iii) $\alpha = 2.$



numerica.

A . L i a p i s