Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 — Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.3 — Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

25. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_1^2 \left(4x^3 - 2x\right)dx$ **ii)** $\int_1^2 \left(6x^2 + 2x + 1\right)dx$

iii) $\int_0^{\pi} \left(\text{συν}x + \text{ημ}x\right)dx$ **iv)** $\int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right)dx$

v) $\int_1^4 \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}dx$ **vi)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\text{ημ}x + \text{συν}x\right)dx$

vii) $\int_1^2 \frac{6 - 2x}{x^4}dx$ **viii)** $\int_1^2 \left(4x - \frac{3}{x}\right)dx$.

26. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{εφ}^2 x\, dx$ **ii)** $\int_0^1 \left(3x^2 + |2x - 1|\right)dx$

iii) $\int_{-1}^1 \left|x^2 - x\right|dx$ **iv)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ημ}x - x\text{συν}x}{\text{ημ}^2 x}dx.$

v) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\frac{\text{ημ}x}{x} - \frac{\text{συν}x}{x^2}\right)dx$ **vi)** $\int_1^e \frac{1 - \ln x}{x^2}dx$

vii) $\int_{-\pi}^{\pi} \text{ημ}x \cdot e^{\text{συν}x}\, dx$ **viii)** $\int_0^1 2^{-x} \cdot 8^x\, dx$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x \le 0 \\ 2\alpha x + \beta, & x > 0. \end{cases}$$

Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής και να ισχύει η σχέση

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 4.$$

28. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx=\ln 3.$$

29. Δίνεται η συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx=1.$$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu x, & x>0.\end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

ii) Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης f.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}e^x\ , & x\le 0\\ 3x^2+1, & x>0.\end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

ii) Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης f.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1} \quad \text{για κάθε } x>1.$$

i) Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε

$$f(x)=2+\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x+1} \quad \text{για κάθε } x>1.$$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_2^3 f(x)dx .$$

33. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,1)$, να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_1^2 x\big(2f(x)+xf'(x)\big)dx.$$

34. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f(x)=\frac{1}{x}+2\int_1^2 t\,f(t)dt \quad \text{για κάθε } x>0.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

35. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f(x)=4\eta\mu x+\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-4\eta\mu x}{h}dx$.

36. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}.$$

Έστω επίσης η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$g(x)=2F(x)-x^2 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

όπου F μία παράγουσα της f για την οποία ισχύει $F(0)=0$.

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση g δεν είναι $1-1$

ii) αν η f είναι $1-1$, υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε $f^{-1}(x_0)=x_0$.

37. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\int_0^1 f(x)dx=1.$$

Έστω επίσης, F μία παράγουσα της f για την οποία ισχύει $F(0)=0$.

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε $F(x_0)=1-x_0$

ii) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοιοι, ώστε $f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)=1$.

38. Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\int_0^1 f(x)dx=0.$$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση

$$g(x)=1+\frac{1}{x+1}\cdot F(x) \quad x\in[0,1]$$

όπου F μία παράγουσά της f για την οποία ισχύει $F(0)=0$.

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $M(x_0,g(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x

ii) $g(x_0)=1+f(x_0)$.

numerica.

A. Liapis