Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 — Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.4 — Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

39. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$ **ii)** $\int_0^{\pi} (x^2-3x)\,\text{συν}\,x\,dx$ **iii)** $\int_1^e x\ln x\,dx$

iv) $\int_0^{\pi} e^x\,\text{συν}\,x\,dx$ **v)** $\int_1^e \ln^2 x\,dx$ **vi)** $\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$.

40. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ **ii)** $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$ **iii)** $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}}\,dx$

iv) $\int_0^{\pi^2} \text{συν}\sqrt{x}\,dx$ **v)** $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **vi)** $\int_0^1 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{x^4}{e^x+1} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)+f(-x)=x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **ii)** $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\frac{32}{5}$.

42. **i)** Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^2 x f\left(x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^4 f(x)\,dx$$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_1^2 x\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx.$$

43. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f''(x)=-2f(x) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο α και στο β, να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)\,dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha).$$

44. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια, ώστε

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \text{και} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)+f''(x)\right)\text{συν}x\,dx=0.$$

Να βρείτε την τιμή $f'(0)$.

45. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη. Αν η συνάρτηση f' είναι συνεχής και ισχύει η σχέση

$$\int_0^1\left(xf'(x)+2f(x)\right)dx=0,$$

να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx=-f(1)$.

46. **i)** Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f(\alpha+\beta-x)=f(x) \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta].$$

Να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta xf(x)dx=\frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)dx.$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}x(\text{εφ}x+\text{σφ}x)dx.$

47. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}f^{-1}(x)dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha).$$

48. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(0)=f(1)$. Αν η συνάρτηση f'' είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε:

i) $f'(\xi)=0$ **ii)** $\int_0^\xi xf''(x)dx=f(0)-f(\xi)$.

49. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και F μια παράγουσά της στο διάστημα $(0,+\infty)$ τέτοια, ώστε

$$F(1)=0 \quad \text{και} \quad xf(x)=x+F(x) \ \text{ για κάθε } \ x>0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e f(t)dt$.

50. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε

$$\int_2^3 f(t)dt=4f(4) \quad \text{και} \quad \int_4^3 f(t)dt=2f(2).$$

Να αποδείξετε ότι

$$\int_3^2 tf'(t)dt=\int_3^4 tf'(t)dt.$$

51. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\int_1^2 f(4x)dx=\int_2^4 f(2x)dx. \quad \text{Να αποδείξετε ότι } \int_4^8 f(t)dt=0.$$

52. **i)** Έστω συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\alpha} f(x)dx+\int_0^{\alpha} f(-x)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$

β) αν η συνάρτηση f είναι περιττή, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0$, ενώ αν είναι άρτια, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_0^{\alpha} f(x)dx$.

ii) Έστω συνάρτηση $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ η οποία έχει συνεχή παράγωγο, είναι άρτια και τέτοια, ώστε $g(1)=2$ και $\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση g' είναι περιττή

β) $\int_{-1}^{1} x\left(g(x)+g'(x)\right)dx=3.$

Κριτήριο Αξιολόγησης 9

Θέμα 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^3 x\right)dx$ και $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^3 x\, dx$

ii) $I_3 = \int_0^{\pi} e^x \eta\mu 2x dx$ και $I_4 = \int_1^{e^\pi} \eta\mu\left(2\ln x\right)dx.$

Θέμα 2

Έστω συνάρτηση $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

- η συνάρτηση f'' είναι συνεχής
- $\int_0^3 xf''(x)dx = 0.$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f'(3) = \dfrac{f(3)-f(0)}{3}$

ii) η συνάρτηση f δεν είναι ούτε κυρτή, ούτε κοίλη.

Κριτήριο Αξιολόγησης 10

Θέμα 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

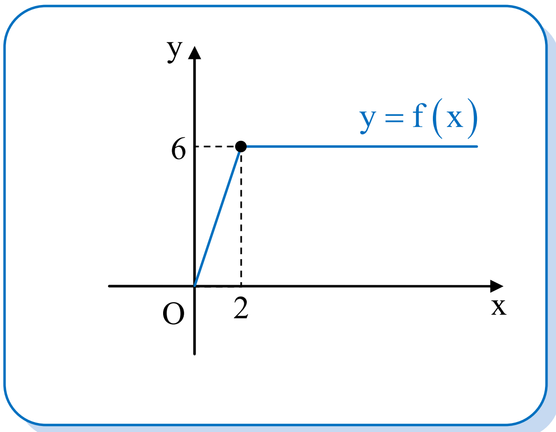
i) $\int_1^e 4x\ln x\,dx$

ii) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

iii) $\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}}\,dx.$

Θέμα 2

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο διάστημα $[0,+\infty)$ με $F(0)=1$, να αποδείξετε ότι:



i) $F(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2+1, & x\in[0,2]\\ 6x-5\ , & x\in(2,+\infty)\end{cases}$

ii) $\int_0^3 f(x)dx=12.$

numerica.

A . L i a p i s