Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 — Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.5 — Ανισοτικά Θεωρήματα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

53. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα με $f(1)=-1$ και $f(2)=1$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\left(f(x)+1\right)\left(f(x)-1\right)\le 0$ για κάθε $x\in[1,2]$

ii) $0\le\int_1^2 f^2(x)dx\le 1$.

54. Έστω συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1 \quad \text{και} \quad f(x)\ge 0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in[0,2].$$

Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^2 f(x)dx>0.$$

55. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^2\left[f(x)-1\right]^2 dx\ge 0$

ii) αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(1)\ne 1$, τότε

$$\int_0^2 f^2(x)dx>2\int_0^2 f(x)dx-2.$$

56. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x},\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\pi}{2}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sigma\upsilon\nu x}dx\le\frac{\pi e}{2}.$$

57. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε $f(0)=4$ και $\int_1^2 f(x)dx=-3$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0\in[1,2]$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)<0$

ii) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

58. Να αποδείξετε ότι:

i) $e^x\geq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) $\int_0^1 e^{x^2}dx>\frac{4}{3}$.

59. Δίνεται συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\int_0^1 g^2(x)dx+\frac{1}{3}=\int_0^1 2xg(x)dx.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^1 [g(x)-x]^2 dx=0$

ii) $g(x)=x$ για κάθε $x\in[0,1]$.

60. **i)** Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\int_0^1 f(x)dx=1 \quad \text{και} \quad f(x)\geq 2x \quad \text{για κάθε} \quad x\in[0,1].$$

Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=2x \text{ για κάθε } x\in[0,1].$$

61. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(0)\leq f(x)\leq f(2) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αν η συνάρτηση f'' είναι συνεχής και $1-1$ να αποδείξετε ότι:

i) $f'(0)=f'(2)=0$

ii) $f'(1)\neq 0$

iii) $\int_0^2 f(x)f''(x)dx<0$.

62. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$ με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{για κάθε } x \in [0,1].$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1) - f(0) \leq 0$ **ii)** $\int_0^1 2xf(x)dx \geq f(1)$.

63. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\int_1^2 f(t)dt < 0 \quad \text{και} \quad f(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έστω επίσης, F μία παράγουσα της f για την οποία ισχύει $F(1) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **ii)** $\int_1^2 (F(x) + xf(x))dx < 0$.

64. Έστω συναρτήσεις $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, οι οποίες είναι συνεχείς και τέτοιες, ώστε

$$\int_0^1 f(x)f(1-x)dx < 0 \quad \text{και} \quad g(x) + f^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in [0,1].$$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) \cdot f(1-x_0) < 0$.

ii) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης g.

65. Έστω συνάρτηση $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, κοίλη και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 3e^{x-2}}{x-2} = 1.$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) \leq 4x - 5 \quad \text{για κάθε} \quad x \in [1,3].$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

iii) Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^3 f(x)dx < 6.$$

Κριτήριο Αξιολόγησης 11

Θέμα 1

Με τη βοήθεια της ανισότητας

$$\ln x \le x - 1$$

που ισχύει για κάθε $x \in (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$\int_1^2 e^x \ln x \, dx < e.$$

Θέμα 2

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f(x) > 4x \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$F(0) = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx > 8$

ii) $F(2) > 11$

iii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty.$

Κριτήριο Αξιολόγησης 12

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{ημx}{x}, \quad x\in\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right].$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right].$$

ii) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f.

iii) Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{ημx}{x}dx<1.$$

Θέμα 2

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κοίλη και τέτοια, ώστε

$$f(1)=1$$

και

$$f(x)\le x \text{ για κάθε } x\in(0,\ 2).$$

i) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\int_{2}^{4}f(x)dx<6.$$

numerica.

A. Liapis