

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.6

Εμβαδόν Επιπέδου Χωρίου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

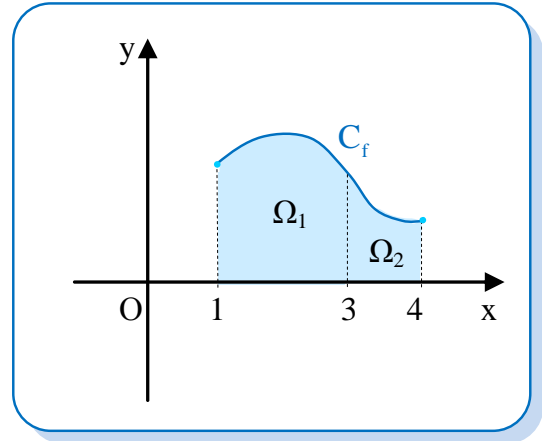
numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

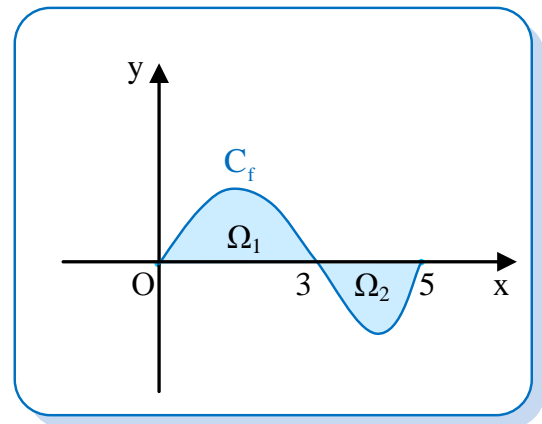
66. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής. Έστω $E(\Omega_1)$ και $E(\Omega_2)$ τα εμβαδά των χωρίων Ω_1 και Ω_2 αντίστοιχα. Αν ισχύουν $E(\Omega_1) = 5$ και $E(\Omega_2) = 2$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^4 f(x) dx.$$



67. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής. Αν τα εμβαδά των χωρίων Ω_1 και Ω_2 είναι $E(\Omega_1) = 11$ και $E(\Omega_2) = 7$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^5 f(x) dx$ ii) $\int_0^5 |f(x)| dx.$



68. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$, όταν:

i) $f(x) = x^2 - 5x + 4$, $x \in \mathbb{R}$ ii) $f(x) = xe^{2-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

69. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = \frac{2}{3}$, όταν:

i) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$ ii) $f(x) = 6|x| - 9$, $x \in \mathbb{R}$.

70. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \pi$, όταν:

i) $f(x) = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$ ii) $f(x) = x \sigma \upsilon \nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

- 71.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{3}$, όταν:
- i) $f(x) = \varepsilon\phi x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ii) $f(x) = \sigma\phi x$, $x \in (0, \pi)$.
- 72.** Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$ όταν:
- i) $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$, $x \in \mathbb{R}$ ii) $f(x) = (2x - 4)\ln x$, $x > 0$.
- 73.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , και την ευθεία με εξίσωση $y = x$, όταν:
- i) $f(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$ ii) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.
- 74.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g όταν:
- i) $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = 2x^2 + x$ ii) $f(x) = xe^{-x}$, $g(x) = \frac{x}{e}$.
- 75.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, όταν:
- i) $f(x) = xe^{x^2}$, $g(x) = ex$ ii) $f(x) = \ln(x+1)$, $g(x) = \ln(x+3)$.
- 76.** Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και την ευθεία $x = 1$, όταν:
- i) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ ii) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$.
- 77.** Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, τον άξονα των x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2,8)$.

78. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 2^{x+3}, \quad \text{και} \quad g(x) = 9x^2 - 6x + 8$$

- i) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς τρία κοινά σημεία τα οποία έχουν τετμημένες διαδοχικούς άρτιους αριθμούς.
- ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$.

79. Δίνεται η συνάρτηση $f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-2} \quad \text{για κάθε } x > 2.$$

- i) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \alpha + 1$ με $\alpha > 2$.

80. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -\alpha$ και $x = \alpha$ με $\alpha > 0$.
- ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$.

81. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

- i) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ασύμπτωτη αυτής στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = t$ με $t > 1$.
- iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t)$.

82. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = xe^{-x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\lambda)$, του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$ με $\lambda > 1$ και τον άξονα των x .
- ii) Αν το λ αυξάνεται με ρυθμό e cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του παραπάνω εμβαδού τη χρονική στιγμή κατά την οποία $\lambda = 2$ cm.

83. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 6x^2 - 4x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\lambda)$, του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \lambda$ και $x = \lambda + 1$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το παραπάνω εμβαδό γίνεται ελάχιστο.

84. Έστω F μια παράγουσα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει $F(1) = 0$.

- i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση F ως προς τη μονοτονία.
- ii) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης F .
- iii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

85. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x^4}{x^4 + (1-x)^4} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) + f(1-x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$.

86. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 9x^2 \ln x \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

- i) Να βρείτε το εμβαδό $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$, με $\lambda > 1$.
- ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\lambda \in (2, e)$ τέτοιος, ώστε $E(\lambda) = 17$.

87. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 2ax + \frac{1}{x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

όπου a σταθερός πραγματικός αριθμός με $a > 1$.

- i) Να βρείτε το εμβαδό $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=1$ και $x=a$.
- ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $a \in (1, 2)$ τέτοιος, ώστε $E(a) = 3$.

88. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x, \quad x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $M(a, f(a))$ τέτοιο, ώστε η C_f να χωρίζει το ορθογώνιο $OAMB$ όπου $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ και $B(0, f(a))$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Κριτήριο Αξιολόγησης 13

Θέμα 1

Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = (x^2 + x)e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και τον άξονα x 's.

Θέμα 2

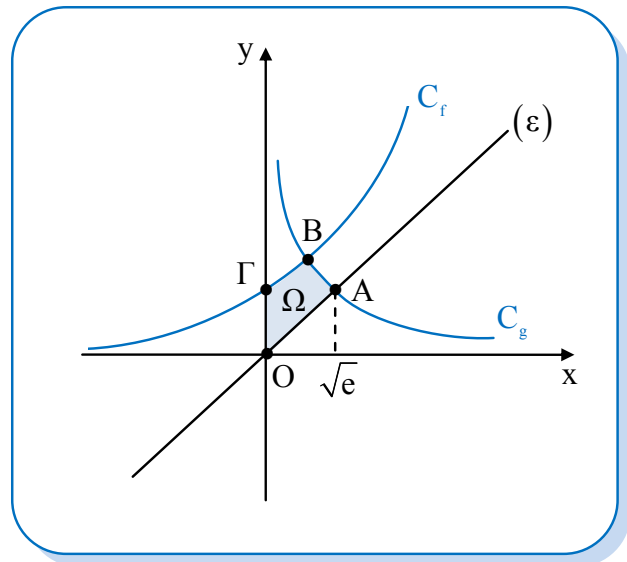
Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{e}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

και η ευθεία $\varepsilon: y = x$.

- i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B.
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου Ω .



Κριτήριο Αξιολόγησης 14**Θέμα 1**

Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |\eta\mu x|, \quad g(x) = |x|$$

και τις ευθείες

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

Θέμα 2

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

- $f(2) = 5$ και $f'(2) = 2$
- η f είναι κοίλη
- η f' είναι συνεχής
- $\int_0^2 xf'(x) dx = 8$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^2 f(x) dx = 2$

- ii) το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $A(2,5)$ και τον άξονα $y'y$ είναι ίσο με 4 τ.μ.



numerica.

A . L i a p i s