Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

numerica.

A. Liapis

Διαγώνισμα

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο διάστημα Δ, να αποδείξετε ότι:

α) Όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ.

β) Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

A2. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τι εκφράζει γεωμετρικά το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$;

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μία συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx=f(\beta)-f(\alpha).$$

β) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν ισχύει η σχέση

$$f(x)\geq 0 \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta]$$

και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0.$$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx-\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx.$$

δ) Για κάθε σταθερά $c\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx=c(\alpha-\beta).$$

ε) Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συνεχών συναρτήσεων f, g σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ δίνεται πάντοτε από τον τύπο

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x) - g(x)\right) dx.$$

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (-2, 2) \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = \frac{3x+2}{x^2-4} \quad \text{για κάθε} \quad x \in (-2, 2)$$

και

$$g(x) = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2} \quad \text{για κάθε} \quad x \in (-2, 2),$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει αντίστροφη συνάρτηση, η οποία ορίζεται στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Β2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 1$.

Β3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x \cdot f(\text{ημ}x)\, dx$.

Β4. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, τους άξονες $y'y$, $x'x$ και την ευθεία $y = 1$.

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(2) = 7 + f(1)$$

και

$$f'(x) = 3x^2 + \int_{-1}^{1} \left(1 + f^2(t)\right) dt \cdot \left(\int_{-1}^{1} f(t)\, dt - f(0) \right) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

Γ1. υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = 3\xi^2$

Γ2. $\int_{-1}^{1} f(t)dt = f(0)$

Γ3. $f(x) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ4. το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την εφαπτομένη της στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, όπου $\alpha > 0$ είναι ίσο με $\dfrac{27\alpha^4}{4}$ τ.μ.

Θέμα Δ

Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι συνεχείς. Έστω επίσης F μία παράγουσα της f και G μία παράγουσα της g τέτοιες, ώστε

$$F(1) = 0 \quad \text{και} \quad G(0) = 0.$$

Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$F(x) = 2 + xG(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι:

Δ1. η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2g(0)$

Δ2. η συνάρτηση G είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$g(x) < 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ3. η συνάρτηση F παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = 0$

Δ4. η εξίσωση $f(x) = 2g(x) + 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

numerica.

A. Liapis