Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΜΕΡΟΣ Α

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

numerica.

A. Liapis

Ασκήσεις για Επανάληψη

1. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f\left(f\left(x\right)\right)=x^9 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι $1-1$

ii) αν $f\left(2\right)=8,$ τότε η εξίσωση $f\left(x\right)=2$ έχει μοναδική λύση την $x=\sqrt[3]{2}$

iii) για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η ευθεία $y=\alpha$ έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

iv) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}.$

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\sqrt{x^2-2x+5}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0=1.$

ii) Να βρείτε – εφόσον υπάρχουν – τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f\left(x\right)-2}$ **β)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f\left(x\right)-e^x\right).$

iii) Να βρείτε – εφόσον υπάρχουν – τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to +\infty}e^{f\left(x\right)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\eta\mu x}{f\left(x\right)}.$

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,1\right)$ τέτοιο, ώστε $f\left(\xi\right)=e^{\xi}.$

3. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(2x\right)}{x}=1.$$

i) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-5x}{f\left(x\right)-\lambda x}=3.$$

ii) Αν η C_f δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα $x'x,$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

iii) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f.

4. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

- $f(x)\geq 2x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to 2} f^2(x)=9.$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)\leq \dfrac{f^2(x)+9}{6}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$

iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

iv) αν η συνάρτηση f^2 είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2,$ τότε η συνάρτηση f είναι επίσης συνεχής στο ίδιο σημείο.

5. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$\left(f^2(x)+1\right)\eta\mu^2 x\leq 2x^2 f(x) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{2f(x)}{f^2(x)+1}\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)}{f^2(x)+1}=1$

iii) αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $\lambda=1$

iv) αν η f είναι συνεχής και $f(e)=e,$ τότε υπάρχει $x_0\in(0,e)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=2.$

6. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f^2(x)=x^2+x+1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+f(x)}{x}=-\frac{1}{2}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x+f(x)\right].$

7. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες είναι συνεχείς και τέτοιες, ώστε:

- $f(x) + g(x) \geq 2x\sigma\upsilon\nu g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- η εξίσωση $f(x) = 2x$ είναι αδύνατη
- $f(1) < 2$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) < 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) η εξίσωση $\dfrac{g(x)}{x} + \dfrac{x^2 - f(x)}{x-2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.

iv) αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

8. Έστω συνάρτηση $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f(x) \neq \frac{1}{x} \quad \text{για κάθε} \quad x \in (0,1].$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) < \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0,1]$.

ii) Αν $f^2(x) = \ln^2(x+1)$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $f(0) < f(1)$, τότε:

α) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

β) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

γ) να υπολογίσετε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f.

9. Έστω συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

- η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη
- η εξίσωση $f(x) = e^x$ δεν έχει θετική ρίζα
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 2x - 1}{x^2} = 2$
- $f(1) > e$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$

ii) $f(x) > e^x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

iii) $f([0, +\infty)) = [1, +\infty)$

iv) αν επιπλέον ισχύει η σχέση

$$f^2(x) + 2e^{2x} = 2f(x) + e^{4x} \quad \text{για κάθε} \quad x \in [0, +\infty)$$

τότε

$$f(x) = e^{2x} \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

10. Έστω συνάρτηση $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής με $f(0) = 1$ και τέτοια, ώστε κάθε σημείο $M(x, f(x))$ της γραφικής της παράστασης, να απέχει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ απόσταση ίση με 1 μονάδα.

i) Να αποδείξετε ότι

$$x^2 + f^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε} \quad x \in [-1, 1].$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

iv) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{1}{f'(x)}.$$

11. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$|\eta\mu x| \le f(x) \le |x| \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

ii) η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

iii) η συνάρτηση f^2 είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

iv) ο άξονας $x'x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^2.

12. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη, συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-4}{x-3}=5 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=2.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

ii) υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $x_0\in(1,3)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0)=\frac{f(2)+f(e)}{2}$$

iii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2f(x-2)}{x-3}=1$

iv) οι ευθείες $\varepsilon: y=2x$ και $\eta: y=5x-11$ εφάπτονται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

13. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε $g(1)=1$, $f'(1)=3$ και

$$f(g(x))=[g(x)]^2+\alpha x^2+\beta x-1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R},$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.
Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=-1$

ii) να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $h(x)=g(f(x))$ στο σημείο $x_0=1$

iii) να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(f(x))-g(x)}{x-1}=6.$

14. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

- η συνάρτηση f είναι συνεχής
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2x}{x^2}=1$
- $g(x)=\begin{cases}\alpha+\eta\mu(\beta x), & x\ge 0\\ f^2(x)-f(x), & x<0\end{cases}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

i) Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ με $f'(0)=2$.

iii) Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η συνάρτηση g να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

iv) Αν (ε) είναι εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(0,g(0))$ να βρείτε το σημείο $B(x_0,g(x_0))$ με $x_0\in(0,2\pi)$ στο οποίο η εφαπτομένη (η) της C_g είναι παράλληλη προς την (ε).

15. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f^3(x)+x^2f(x)=x\eta\mu^2x \quad \text{για κάθε} \quad x\neq 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$

ii) $(f'(0))^3+f'(0)=1$

iii) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$.

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη
- η ευθεία $\varepsilon: y=2x-3$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $A(1,f(1))$
- $g(x)=x^2-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=-1$ και $f'(1)=2$

ii) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(f(x))-2}{x-1}=-6$

iii) από το σημείο $A(1,f(1))$ διέρχονται δύο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2,\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x)=x^2+\alpha x+\beta,\ \ x\in\mathbb{R}$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και η ευθεία $\varepsilon: y=2x-2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο σημείο $M(-1, g(-1))$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha=4$ και $\beta=-1$

ii) η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

iii) οι C_f και C_g έχουν δύο κοινές εφαπτόμενες.

18. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

- η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη
- η συνάρτηση f' είναι συνεχής
- η C_f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$
- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}=1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=3$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) $f(2)=2f'(2)-1$

iii) υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- $f(x)=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $(g(x))^2=x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)>3g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να λύσετε την εξίσωση $g(x)=0$.

ii) Να αποδείξετε ότι $g(x)=-x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μία κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g.

20. Έστω συνάρτηση $f:[0,8]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και $M(x,y)$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.

i) Να βρείτε, συναρτήσει των x και $f(x)$, τον τύπο της απόστασης d του σημείου $M(x,y)$ από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στη C_f που απέχει από το $O(0,0)$ λιγότερο ή ίσο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της C_f από το $O(0,0)$ και ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στη C_f που απέχει από το $O(0,0)$ περισσότερο ή ίσο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της C_f από το $O(0,0)$.

iii) Αν η τετμημένη x του σημείου M αυξάνεται με ρυθμό 10 cm/sec και τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το M συμπίπτει με το σημείο $(3,4)$, η απόσταση d αυξάνεται με ρυθμό $14\,cm/sec$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του σημείου M την ίδια χρονική στιγμή t_0.

21. Έστω συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- η f είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι συνεχής
- $g(x)=xf(x)-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο, ώστε $\lim\limits_{x\to x_0} g'(x)=-1$
- $f(0)=1$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $g'(0)=0$

ii) η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2x_0,0)$

iii) υπάρχει $\xi\in(0,x_0)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi)=\xi-1$$

iv) η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο 0 με

$$g''(0)=2f'(0).$$

numerica.

A . L i a p i s