Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

numerica.

A. Liapis

Περιεχόμενα

Α' Ομάδα 1

Β' Ομάδα 16

Προτεινόμενα Θέματα για Επανάληψη

Α΄ Ομάδα

1. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(0)=2 \quad \text{και} \quad f'(x)=e^{2x}f(-x) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

ii) $f''(x)+f(x)=2f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iii) η συνάρτηση $g(x)=\left(f'(x)-f(x)\right)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή

iv) $f(x)=2e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε:

- $f(0)=1$ και $g(0)=0$
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$
- $f'(x)=-f(x)g(x)$ και $g'(x)=1+g^{2}(x)$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι:

i) οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες

ii) η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=-f(x) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

iii) η συνάρτηση

$$F(x)=\left[f(x)-\text{συν}x\right]^{2}+\left[f'(x)+\text{ημ}x\right]^{2}$$

είναι σταθερή στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

iv) $f(x)=\text{συν}x$ και $g(x)=\text{εφ}x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=3x^4+4x^3+4x^2-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f σε καθένα από τα διαστήματα μονοτονίας της.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^4+4x^3+4x^2-1=0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x)=x^4+2x^3+4x^2+2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

στα οποία οι εφαπτόμενες ευθείες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

4. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f''(x)=12\sqrt{f(x)} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$ το σημείο $O(0,0)$, να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο

ii) η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα

iii) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$

iv) $f(x+1)+f(x-1)>2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

5. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και πραγματικός αριθμός α τέτοιοι, ώστε

$$f(0)=\alpha^2 \text{ και } (x^2+1)f'(x)+2x=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\alpha^2-\ln(x^2+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii) Να βρείτε την τιμή του α έτσι, ώστε να ισχύει η σχέση

$$f(x)\le \eta\mu^2\alpha \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

iv) Για $\alpha=0$, να αποδείξετε ότι $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=12x^3\ln x-3x^4-10x^3+x^2,\quad x>0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f'' είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f''.

iii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

7. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^2-2x\ln x,\quad x>0.$$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν φυσικά υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iv) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$2\ln x=x-\frac{\lambda}{x}$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

8. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή και τέτοια, ώστε $f(0)=f(2)$ και $f'(1)=f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$

ii) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

iii) $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iv) $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

9. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κοίλη και τέτοια, ώστε $f(0)=0$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x)=\frac{f(x)}{x},\quad x>0$$

για την οποία ισχύει η σχέση $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f'(x) < g(x) < f'(0)$ για κάθε $x > 0$

ii) η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα και όλες οι τιμές της είναι θετικές

iii) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και

$$f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0)$$

iv) $f(\ln x) < f(x-1)$ για κάθε $x \in (0,1)$.

10. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(x) = \frac{1}{3} x f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = f(0) = 0$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f' ως προς τη μονοτονία.

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f .

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f'' είναι συνεχής στο 0.

11. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε

$$f(x) + f(4-x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη

ii) η συνάρτηση f δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη

iii) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα

iv) η ευθεία $\varepsilon : y = x - 2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$.

12. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f''(x)+f(x)>2f'(x) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αν η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$ και $f'(0)=1$

ii) η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=f(x)\cdot e^{-x} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

είναι κυρτή

iii) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινό σημείο στο οποίο η εφαπτομένη τους είναι κοινή

iv) $f(x)\geq xe^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

13. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της $M(\alpha,f(\alpha))$ να έχει εξίσωση $y=(\ln\alpha)\cdot x-\alpha$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)=x\ln x-x$ για κάθε $x>0$

ii) η συνάρτηση f είναι κυρτή

iii) $x\ln x\geq x-1$ για κάθε $x>0$

iv) η εξίσωση $2(x+1)\ln x-4x+e+1=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(1,e)$.

14. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- η συνάρτηση g είναι συνεχής
- η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη
- $f(x)+g(x)>xe^{g(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu 2x}=\dfrac{1}{2}$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$.

ii) Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)\leq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **β)** $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-x}{f(x)-x}.$$

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε

$$\frac{g(\xi)}{\xi}+\frac{f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1}{1-\xi}.$$

15. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=xe^{x}-e^{x}+1,\ \ x\in\mathbb{R}$$

και

$$g(x)=e^{x}+x-1,\ \ x\in\mathbb{R}$$

καθώς επίσης και η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x$ η οποία εφάπτεται στη C_g.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi)=4\xi-3\xi^{2}.$$

ii) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f.

iii) Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

iv) Να αποδείξετε ότι

$$g\big(g(x)-1\big)-g\big(g(x)\big)\le g(2x-1)-g(2x)\ \text{ για κάθε }\ x\in\mathbb{R}.$$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=-(x+1)e^{-x}\ \ \text{για κάθε}\ \ x\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

iv) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$\alpha e^{x}+1=-x$$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

17. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(1)=1 \quad \text{και} \quad xf'(x)+f(x)=\frac{2}{x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in(0,+\infty).$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=\frac{2\ln x+1}{x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in(0,+\infty).$$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv) Να βρείτε το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης $x^2=e^{\alpha x-1}$.

18. Έστω συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(1)=0 \quad \text{και} \quad f'(x)=\frac{1}{1+\ln x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in[1,+\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι κοίλη

ii) $\dfrac{x-1}{1+\ln x}<f(x)<x-1$ για κάθε $x>1$

iii) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα $[0,+\infty)$

iv) η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

19. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε:

- $f(x)=xe^{1-x}-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $g(1)=0$
- $g(x)\geq 1-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να αποδείξετε ότι $g'(1)=-1$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $g(x)=x\left(e^{1-x}-1\right)$.

20. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2 \quad \text{και} \quad f''(x)\neq 0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2x$.

iii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(4)=7$, να αποδείξετε ότι

$$f(x)\leq 2x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\ln 2} e^x f\left(e^x\right)dx<3$.

21. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και F μία παράγουσά της τέτοια, ώστε:

- $\int_0^1 f(t)dt=1$
- $F(x)-F(0)\leq x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$ και $f(1)=2$

ii) αν $F(0)=0$, τότε:

α) υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε $f(\xi)=2\xi$

β) η εξίσωση $f'(x)=2$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(0,1)$

γ) η συνάρτηση f δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη.

22. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- $f\left(F(x)\right)=2x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\int_0^1 f(x)dx=1$
- $F(0)=0$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(1)-f(0)=2$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f'(1)=2$.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' δεν είναι γνησίως μονότονη.

iv) Αν η συνάρτηση f' είναι σταθερή, να βρείτε τον τύπο της F.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\eta\mu x}-1}{x}, & x\neq 0\\ \alpha \quad , & x=0\end{cases}$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha=1$

ii) η ευθεία $\varepsilon: y=\dfrac{1}{2}x+1$ εφάπτεται στη C_f

iii) η ευθεία $\eta: y=0$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και έχει με αυτήν άπειρα κοινά σημεία

iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)\,dx=\frac{1}{e}$.

24. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε:

- $f(1)=3$ και $g(1)=1$
- $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ για κάθε $x>0$
- $g'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε $x>0$.

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $\Phi(x)=f'(x)+g'(x)$, $x>0$ είναι σταθερή

ii) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$ και $g(x)=\dfrac{2x^2-1}{x}$ για κάθε $x>0$

iii) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες

iv) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{f(x)g(x)e^{g(x)}}{x}\,dx=1$.

25. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f'(x)+f(x)=\frac{2x}{e^x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

και

$$\int_0^3 f(x)e^x dx = 15.$$

i) Να αποδείξετε ότι
$$f(x)=(x^2+2)e^{-x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

iii) Να λύσετε την ανίσωση
$$f(x^2+1)-f(x^2)<f(x+1)-f(x).$$

iv) Να λύσετε την εξίσωση
$$f(2x)-f(x)=f(3x)-f(2x).$$

26. Έστω συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια, ώστε

$$|f'(x)-2x|<1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in[-1,1]$$

και

$$|f''(x)-2|<1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in[-1,1].$$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$ και ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο ξ ολικό ελάχιστο.

iii) Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$f'(-1)+f'(1)=0 \quad \text{και} \quad \int_{-1}^{1} xf''(x)dx>0,$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$ τέτοιοι, ώστε

$$\frac{1}{f''(\xi_1)}+\frac{1}{f''(\xi_2)}=\frac{2}{f'(1)}$$

β) να βρείτε τη θέση του ολικού μεγίστου της συνάρτησης f.

27. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-4x^2}{\ln x}=-2 .$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=4$

ii) η ευθεία $y=6x-2$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $M(1,4)$

iii) αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια, ώστε

$$\int_1^2 (2-x)f'(x)dx=4 \quad \text{και} \quad f''(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

τότε:

α) $\int_1^2 f(x)dx=8$ **β)** η συνάρτηση f είναι κυρτή.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=xe^{-\frac{1}{x}} \text{ για κάθε } x\neq 0.$$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη (ε) της C_f και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x>x+1$ που ισχύει για κάθε $x\neq 0$, να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία (ε) στο διάστημα $(-\infty,0)$ και πάνω από αυτήν στο διάστημα $(0,+\infty)$.

iii) Να βρείτε, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$.

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει στο διάστημα $(1,2)$ ακριβώς ένας αριθμός ξ τέτοιος, ώστε

$$f(\xi)=(2-\xi)\int_2^3 f(t)dt.$$

29. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=1$ και τέτοια ώστε

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=\frac{f(x)}{e^x}+2x-2 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{2x}-2xe^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

iii) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=1$.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $x=1$, $y=1$.

30. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(0)=1 \quad \text{και} \quad f'(x)+2=f(x)+2x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ και την ευθεία $x=2$.

iv) α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1-x$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{f(x)+x-1}$.

31. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και $f(1)=0$
- η συνάρτηση f' είναι συνεχής
- η συνάρτηση g είναι γνησίως μονότονη και

$$g(x)=f(x)f'(x) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

- $h(x)=\frac{1}{2}f^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h στο σημείο της $A(1, h(1))$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι κυρτή.

iii) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης g.

iv) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0, x=2$ είναι $E=h(0)+h(2)$ τ.μ.

32. Δίνονται τρεις συναρτήσεις $f, g, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- $f(x)=\dfrac{xημx}{1+e^x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $g(x)=xσυνx-ημx$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $h'(x)=-[f(x)+f(-x)]$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h(0)=0$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ii) $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[0,π]$

iii) $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iv) το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=π$ είναι ίσο με 4 τ.μ.

33. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε:

- $f(0)=g(0)=1$
- $f'(x)=\dfrac{x}{g(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $g'(x)=\dfrac{x}{f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να βρείτε τον τύπο και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f.

iv) Αν F είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f τέτοια, ώστε $F(1)=0$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

34. Έστω συνάρτηση $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε:

- $f(0)=2$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-2,2)$ με

$$x+f(x)f'(x)=0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in(-2,2).$$

i) Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της C_f απέχει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ απόσταση ίση με 2 μονάδες.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[-2,2]$.

iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\etaμx-\frac{x}{x+1} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η τρίτη παράγωγος της συνάρτησης f είναι αρνητική

ii) η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής

iii) υπάρχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο

iv) αν Ω είναι το χωρίο που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$, τότε $E(\Omega)=1-\frac{\pi}{2}+\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$ τ.μ.

36. Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[0,+\infty)$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και τέτοια, ώστε $f(1)=3$ και

$$xf'(x)=f(x)+x^2-2x \quad \text{για κάθε} \quad x\in(0,+\infty).$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-2x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της και την ευθεία $x=2$.

iv) Να αποδείξετε ότι

$$f(x+3)+f(x+1)>2f(x+2) \quad \text{για κάθε} \quad x\geq 0.$$

37. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2-12x+\gamma,\ x\in\mathbb{R}$$

όπου α, β, γ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί, η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=-1$ και $x_2=2$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$, $\beta=-3$ και να καθορίσετε το είδος των παραπάνω ακροτάτων.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα μονοτονίας της.

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ για τις διάφορες τιμές του $\gamma\in\mathbb{R}$.

iv) Να βρείτε την τιμή του γ για την οποία το άθροισμα E_π των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και περικλείονται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0, x=4$, είναι μεγαλύτερο κατά 4 τ.μ. από το άθροισμα E_κ των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ και περικλείονται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0, x=4$.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=(x-2)e^x+2 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς μια ασύμπτωτη ευθεία (ε). Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία (ε);

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής. Στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (η) της C_f στο σημείο καμπής της.

iii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ασύμπτωτη (ε), την εφαπτομένη (η) και την ευθεία $x = \alpha$ με $\alpha < -2$, είναι $E(\alpha) = (\alpha - 3)e^{\alpha} + 1$ τ.μ.

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (-4, -2)$ τέτοιο, ώστε

$$E(\alpha) = 1 - \frac{1}{e}.$$

39. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{7}x^3 + \frac{6}{7} \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της συνάρτησης f και να βρείτε τον τύπο της.

iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} και τις ευθείες $y = x$, $x = 1$ και $x = 2$.

Β΄ Ομάδα

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h με τύπους:

- $f(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \quad , \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- $g(x) = \frac{\eta\mu x}{x} \quad , \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- $h(x) = x\eta\mu\frac{\pi}{x} \quad , \quad x \in (2, +\infty).$

i) Να αποδείξετε ότι

$$-1 < f(x) < 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

ii) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση g.

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x^2}{x^2+1}\cdot ημ\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)=\frac{x^2+1}{x^2+3}\cdot ημ\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right).$$

iv) Να αποδείξετε ότι

$$h(x+1)-h(x)<1 \quad \text{για κάθε} \quad x>2.$$

2. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες είναι συνεχείς και τέτοιες, ώστε:

- $f(0)=\frac{1}{2}$
- $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)g(x)=1+g(x)e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)-e^x<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi<0$ τέτοιος, ώστε

$$f(\xi)=\xi g(\xi).$$

iv) Αν επιπλέον οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες και ισχύει

$$f(x)\left(g'(x)-8f(x)e^{-2x}\right)=g(x)f'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

να βρείτε τους τύπους των παραπάνω δύο συναρτήσεων.

3. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$f'(x)+xf''(x)>f''(x) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

και

$$g(x)=(x-1)f'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x)=e^x-\frac{1}{x}-1 \quad \text{για κάθε} \quad x>0.$$

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις g και f.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\frac{x}{e}\right)f'(\ln x)+2f'(-1)=0.$

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

iv) Να αποδείξετε ότι

$$f\left(e^x - \ln x\right) > f(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

4. Έστω δύο συναρτήσεις $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x)=\ln(1+x)-x \text{ για κάθε } x\geq 0$$

και

$$g(x)=x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \text{ για κάθε } x>1.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)<0$ για κάθε $x>0$

ii) $g'(x)=\dfrac{1}{x-1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)$ για κάθε $x>1$

iii) η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα

iv) για κάθε $\alpha>1$ η εξίσωση $\ln x-\ln(x-1)=\dfrac{\alpha}{x}$ έχει μοναδική ρίζα ως προς x.

5. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε:

- $f'(x)+x=f(x)+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $g'(x)g(x)+g'(x)=f'(x)g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=g(0)=1$
- η g δεν έχει κρίσιμα σημεία.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να αποδείξετε ότι $g(x)+\ln g(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv) Να βρείτε τον τύπο της g.

6. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε:

- $f(1) = 1$ και $g(1) = 0$
- $f'(x) - f(x) = e^x g'(x) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $2f(x) + x^2 - 2x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = e^x g(x) + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Να υπολογίσετε:

α) την τιμή $g'(1)$ **β)** το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x+1) g\left(\frac{x+2}{x+1} \right) \right]$.

iii) Αν $g(x) = (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε:

α) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

β) τις τιμές του αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να υπάρχουν τρία σημεία επαφής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$\Phi(x) = e^x (1 - x) + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

στα οποία οι εφαπτόμενες ευθείες να διέρχονται από το σημείο $M(1, \lambda)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^2 + x + \ln x \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι έχει αντίστροφη συνάρτηση.

ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$x^4 + \ln x < x.$$

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο σημειό $x_0 = 2$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο της $A(2, 1)$.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x^9) + f(x^5) = f(x^7) + f(x^3)$$

έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.

8. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(1)=e$ και

$$f'(x)-f(x)=\frac{x\ln x-1}{x} \quad \text{για κάθε} \quad x>0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)=e^x-\ln x$ για κάθε $x>0$

ii) η συνάρτηση f είναι κυρτή και η εξίσωση

$$xe^x=1+\alpha x$$

έχει μοναδική θετική ρίζα για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$

iii) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο σημείο $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ το $f(x_0)=x_0+\frac{1}{x_0}$

iv) $e^x>\ln x+2$ για κάθε $x>0$.

9. Έστω δύο συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x)=xe^{1-x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

και

$$g(x)=x\ln x-x-e^{1-x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in(0,+\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) η συνάρτηση g είναι κυρτή

iii) υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\xi\in(0,+\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(\xi)=-\xi\ln\xi$

iv) η συνάρτηση g έχει ολικό ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό.

10. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\ln x+\frac{1}{2x^2}-1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in(0,+\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$

ii) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες

iii) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2,\quad x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x)=\ln x,\quad x>0$$

έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες

iv) αν η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x+\kappa$, είναι οποιαδήποτε κοινή εφαπτομένη των C_g και C_h, τότε

$$\ln x \le \lambda x+\kappa \le \frac{x^2}{2} \quad \text{για κάθε} \quad x>0.$$

11. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και F μία παράγουσά της στο $\mathbb{R}$. Έστω επίσης, ότι ισχύουν οι σχέσεις:

- $2xf(x)-(x^2+1)f'(x)=(x^2+1)f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $F(0)=3$
- $F(x)e^x \ge 2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=e^{-x}(-x^2-1) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

ii) Να υπολογίσετε το όριο

$$L=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(f(x)\right)^2 \eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right)-f(x)\right].$$

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι κυρτή και στη συνέχεια ότι

$$F(x)+F(x+2)>2F(x+1) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

iv) Αν $\alpha\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\xi\in(\alpha,\alpha+1)$ τέτοιος, ώστε

$$2F(\xi)=F(\alpha)+F(\alpha+2).$$

12. Δίνονται τρεις συναρτήσεις $f, F, g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής
- η συνάρτηση F είναι μία παράγουσα της f με $F(0)=0$ και $F(2)=6f(0)$
- η συνάρτηση g έχει τύπο

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{F(x)}{x}, & x>0\\ f(0), & x=0.\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x>0$ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιος, ώστε

$$F(x)=xf(\xi)$$

ii) η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με

$$g'(x)=\frac{f(x)-g(x)}{x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in(0, +\infty)$$

iii) η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα

iv) υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0)-g(x_0)=x_0 f(0).$$

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g, h:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- $f(0)=0$ και $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $g(0)=0$ και $g'(x)=1+g(x)\varepsilon\varphi x$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $h(x)=g(x)\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

i) Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα

β) $g(x)=\varepsilon\varphi x$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(g(x))=x$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

14. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$\int_0^{f(1)} xe^x dx = 0$$

και

$$f\left(e^{f'(x)}\right)+\ln\left(xf'(x)\right)=f\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \quad \text{για κάθε} \quad x\in(0,+\infty).$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)=f(e^x)+\ln x$, $x>0$ είναι γνησίως αύξουσες.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

iv) Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται πάνω στη C_f και η τετμημένη του μειώνεται με ρυθμό $-(e^4+4)$ cm / sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta=M\hat{O}x$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το Μ διέρχεται από το σημειό $A(e^2,2)$.

15. Έστω δύο συναρτήσεις $f,F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- η συνάρτηση F είναι παράγουσα της συνάρτησης f
- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\in\mathbb{R}$
- $F(x)=\ln(\alpha x^2+2x)-\ln(x+3)-\int_1^3 f(x)dx$ για κάθε $x>0$,

  όπου α ένας πραγματικός αριθμός με $\alpha\geq 0$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha=0$

ii) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+3x}$ και $F(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+3}\right)$ για κάθε $x>0$

iii) οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης F

iv) $f(x)>\ln\sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}}-\ln\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}$ για κάθε $x>0$.

16. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με σύνολο τιμών το διάστημα $(0,1)$ και τέτοια, ώστε

$$f^2(x)=f(x)-f'(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία $y=-x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(-1,0)$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)-\varepsilon\varphi f(x)}{\eta\mu f(x)-f(x)}=3$

iv) αν $f(0)=\dfrac{1}{2}$, τότε:

α) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} f^2(x)\,dx=\ln 2-\frac{1}{4}$.

17. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(0)=-e^{f(0)}$ και

$$f'(x)=\frac{1}{1+e^{f(x)}} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)+e^{f(x)}=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$

iii) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}f^2(0)-f(0)-1$.

iv) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

β) να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

18. Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[0,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Έστω επίσης συνάρτηση F, η οποία είναι παράγουσα της f στο διάστημα $[0,+\infty)$ και τέτοια, ώστε

$$F(2)=f(2)=\frac{1}{2}f(1).$$

Αν ισχύει η σχέση

$$\int_0^1 (x-1)f(x)dx+\int_0^1 F(x)dx=0$$

να αποδείξετε ότι:

i) $F(0)=0$

ii) $F(2)<0$

iii) η συνάρτηση F είναι κυρτή στο διάστημα $[1,+\infty)$ και $F(1)>0$

iv) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$.

19. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

- $x\cdot f(x)\cdot \ln f(x)=1$ για κάθε $x>0$
- για κάθε $\alpha>1$ η ευθεία $\varepsilon: y=\alpha$ έχει κοινό σημείο με τη C_f.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)>1$ για κάθε $x>0$

ii) $f((0,+\infty))=(1,+\infty)$

iii) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{x\ln x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in(1,+\infty)$$

iv) αν $f(\alpha)=e$ και $f(\beta)=e^2$, $\alpha,\beta>0$, τότε

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx=\frac{1}{2}+\ln 2.$$

20. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f'(x)+1=f(x)+x+1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

και

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}e-2.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=\frac{1}{2}e^x-x-1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1<x_2$.

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}-\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{x_1-x_2}{\ln 2}$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του ερωτήματος **iii).**

21. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε:

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{xf(x+h)-xf(x-h)}{2h}+\ln x=f(x)+x+1$ για κάθε $x>1$
- $xg(x)=f(x)-\ln x$ για κάθε $x>1$
- $\int_1^2 g(x)dx=2\ln 2-1.$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα

ii) $f(x)=(x+1)\ln x$ για κάθε $x\geq 1$

iii) η συνάρτηση f είναι κυρτή

iv) $\dfrac{f(x^2)-f(x)}{x-1}>x\ln x+x+1$ για κάθε $x>1.$

22. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και παρουσιάζει ολικό μέγιστο M για $x=1$ και για $x=2$.
Έστω επίσης η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=f'(x)e^{-f(x)} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η C_g έχει τρία τουλάχιστον κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$

ii) η εξίσωση $f''(x)=(f'(x))^2$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(1,2)$

iii) υπάρχει $x_0\in[1,2]$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=(2x_0-3)f(x_0)$

iv) $\int_1^2 xg(x)dx\geq 0.$

23. Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, κοίλη και τέτοια, ώστε $f(0)=0$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f'(x)<\dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

ii) $\dfrac{f(5)}{5}<\dfrac{f(3)}{3}$

iii) $\dfrac{f(5)}{5}<\dfrac{1}{8}\displaystyle\int_3^5 f(t)dt<\dfrac{f(3)}{3}$

iv) η εξίσωση $f(x)=\dfrac{x}{8}\displaystyle\int_3^5 f(t)dt$ έχει μοναδική θετική λύση.

24. Δίνονται οι συναρτήσεις f, F, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- $f(0)=0$ και $2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- η συνάρτηση $F(x)$ είναι μία παράγουσα της συνάρτησης $\eta\mu x\cdot f(x)$
- $g(x)=F(x)-F(-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) $g(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iii) η εξίσωση $F(x)-F(-x)=\dfrac{1}{2}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

iv) $1+\displaystyle\int_0^1 f(x)dx<\dfrac{e}{2}$.

25. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, οι οποίες είναι συνεχείς και τέτοιες, ώστε $g(1)>0$ και

$$xf(x)=g^2(x)+x^2 \quad \text{για κάθε} \quad x\in(0,+\infty).$$

Αν η ευθεία με εξίσωση

$$y=-x+2$$

είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει αριθμός $\xi > 1$ τέτοιος, ώστε $g(\xi) = 0$

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$

iii) η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 4$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

iv) $\int_2^4 f(x)dx \geq 6.$

26. Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \ln x - \ln(\ln x) \quad \text{για κάθε} \quad x > 1.$$

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = \text{συν}\frac{2\pi x}{e}.$$

iii) Να αποδείξετε ότι:

α) $x > \ln x$ για κάθε $x > 1$

β) $1 - \dfrac{\ln x}{x} < f(x) < \dfrac{x}{\ln x} - 1$ για κάθε $x > 1.$

iv) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{1 + f(x)}dx > \frac{3}{2}.$

27. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έστω επίσης F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ και G μία παράγουσα της F στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις

$$F(0) = G(1) = 0 \quad \text{και} \quad G(x) \geq 2x - 2 \text{ για κάθε } x \in (0, 2).$$

i) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)dx.$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι κυρτή.

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_1^3 G(x)dx > 4.$

iv) Να λύσετε την εξίσωση $F(G(x)) = G'(2x - 2).$

28. Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε

$$f(0)=1 \quad \text{και} \quad f(f(x))=x \quad \text{για κάθε} \quad x\in[0,1].$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 [f(x)-x]^2\cdot f'(x)dx-\int_0^1 [f(x)-x]^2 dx=-\frac{2}{3}..$$

iii) Αν επιπλέον ισχύει

$$f'(x)\ge -1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in[0,1]$$

τότε:

α) να υπολογίσετε το $\int_0^1 [f'(x)+1]dx$

β) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

29. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $0<\alpha<\beta$ τέτοιες, ώστε:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(\alpha)=\alpha$ και $f(\beta)=\beta$
- $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$
- $g(x)=\ln f(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$
- Η C_f έχει την ίδια εφαπτομένη στα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$.

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{1}{\xi}$$

ii) $f'(\alpha)=f'(\beta)=1$

iii) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοιοι, ώστε

$$\alpha g''(\xi_1)=\beta g''(\xi_2)$$

iv) αν επιπλέον ισχύει η σχέση

$$\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx=0$$

τότε $\alpha<1<\beta$.

30. Έστω οι συναρτήσεις $f, g:[0,2]\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε:

- $f(x)=\frac{1}{3}f(2)+g(x)$ για κάθε $x\in[0,2]$
- $g'(x)=f^2(x)$ για κάθε $x\in[0,2]$
- $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,2]$
- $g(2)=\frac{2}{3}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,2]$.

ii) Να αποδείξετε ότι $g(x)=\frac{1}{3-x}-\frac{1}{3}$ για κάθε $x\in[0,2]$.

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, την εφαπτομένη της (ε) στο σημείο της $A(2, g(2))$ και τον άξονα $x'x$.

31. Έστω συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(-1)=-1,\quad f(1)=1$$

και

$$f'(x)\geq 3x^2-2x \quad \text{για κάθε} \quad x\in[-1,1].$$

i) Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{-1}^{1}\left[f'(x)-3x^2+2x\right]dx=0$

β) $f(x)=x^3-x^2+1$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της C_f. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε τη C_f.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία (ε) του προηγούμενου ερωτήματος.

32. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε:

- $f^3(x)+3f(x)=4x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- Υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}.

iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=x$.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0,\ x=1$.

33. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+\eta\mu(x-1)}{\ln x}=0$$

και

$$2\alpha x+\lim_{h\to0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{h}=6 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=0$ και $f'(1)=-1$

β) $f'(x)=\alpha x^2-6x+(5-\alpha)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Αν το άθροισμα E_π των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και περικλείονται από τη C_f και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$ είναι ίσο με το άθροισμα E_κ των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ και περικλείονται από τη C_f και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$, τότε:

α) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

β) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)\cdot\varepsilon\varphi x$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

34. Έστω δύο συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- $f(1)=0$
- $xf'(x)=\frac{1}{x}+f(x)$ για κάθε $x>0$
- $g(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)=\frac{x^2-1}{2x}$ για κάθε $x>0$

ii) η f έχει αντίστροφη συνάρτηση, για την οποία ισχύει η σχέση

$$f^{-1}(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

iii) $(g\circ f)(x)=x$ για κάθε $x>0$

και

$g(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iv) το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y=2$ είναι ίσο με $\frac{3-\ln 4}{4}$ τ.μ.

35. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε

$$f'(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και

$$f(1-x)=4x+3+xf'(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει αριθμός $\xi\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi)+f'(1)=-4$$

ii) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα

iii) $f(1+f'(x))>3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να λύσετε την ανίσωση

$$f\left(1-f^{-1}(x^2+2x)\right)-f'(1)>7$$

iv) το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ και $y=3$ είναι ίσο με 1 τ.μ.

36. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε

$$\int_0^1 \left[f^2(x)+f'(x)F(x)\right]dx=0,$$

όπου F μία παράγουσα της συνάρτησης f.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε

$$f^2(\xi)=-f'(\xi)\cdot F(\xi).$$

ii) Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $F(0)=0$ και

$$f(x)+F(x)=e^{-x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R},$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι

$$F(x)=xe^{-x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

β) να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, F και τον άξονα $y'y$

γ) να μελετήσετε τη συνάρτηση F ως προς την κυρτότητα και να λύσετε την ανίσωση

$$F(|x|+3)-F(|x|+2)<F(4)-F(3).$$

37. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^5+x-1, \quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Στη συνέχεια, να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της C_f. Επίσης, να σχεδιάσετε τη C_f και την ευθεία $y=x$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$|f(x)-f(y)|\geq|x-y| \quad \text{για κάθε} \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.

iv) Να βρειτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την ευθεία $y=x$ και τον άξονα $x'x$.

numerica.

A. Liapis